

# MOUVEMENT D'UNE PARTICULE SOUMISE A UNE FORCE CENTRALE CONSERVATIVE.

« Et pourtant, elle tourne ! » Galilée (1564-1642)

## PRELUDE

Dans ce chapitre, le système physique étudié correspond toujours à un point matériel (ou particule)  $M$  de masse  $m$ . L'étude sera toujours conduite dans un référentiel galiléen  $\mathfrak{R}_g$ .

Notre particule sera soumise à une **force centrale et conservative**. La **force de gravité** (ou interaction gravitationnelle) entre deux masses et la **force électrostatique** (ou interaction électrostatique) entre deux charges sont deux exemples fondamentaux de forces centrales et conservatives. A elles seules, ces deux forces expliquent un nombre important de phénomènes physiques.

## I - Force centrale et conservative : caractéristiques

### 1.1 Système de coordonnées sphériques

Dans ce chapitre nous allons utiliser, entre autres, le système de coordonnées sphériques. Un point  $M$  sera repéré par les coordonnées  $(r, \theta, \phi)$  comme indiqué par le schéma ci-dessous.

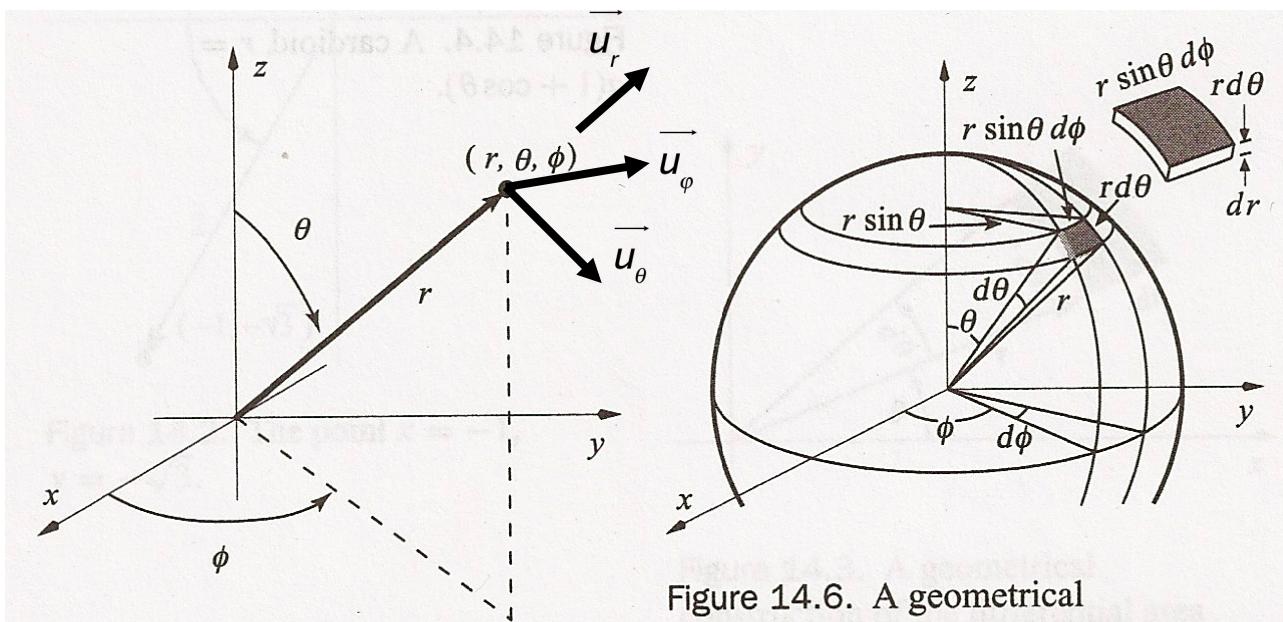


Figure 14.5. A representation of a point in a spherical coordinate system. A point is specified by the spherical coordinates  $r, \theta$ , and  $\phi$ .

Figure 14.6. A geometrical construction of the differential volume element in spherical coordinates. The differential volume is the product of the three differential lengths,  $dr$ ,  $r d\theta$ , and  $r \sin \theta d\phi$ .

On attache au point  $M$  une **base locale**  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ . Dans cette base locale, la position du point est repérée par le vecteur  $\vec{OM} = \vec{r} = r \vec{u}_r$ .



Il ne faut pas mélanger le système de coordonnées sphériques et le système de coordonnées cylindriques, les mêmes notations sont utilisées mais pour désigner des grandeurs différentes (en particulier  $\theta$  et  $r$ ).

## 1.2 Force centrale

Le point  $M$  de coordonnées  $(r, \theta, \varphi)$  est soumis à une force dite **centrale** si cette force s'écrit, par définition :

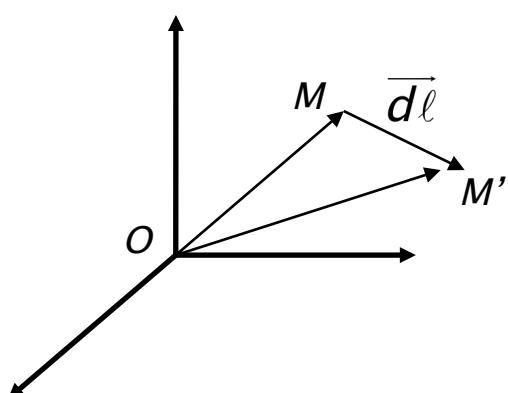
$$\vec{F} = F(r) \vec{u}_r \quad (\text{force centrale par définition})$$

Le module de  $\vec{F}$ , noté simplement  $F$ , ne dépend que de  $r$ , c'est-à-dire la distance du point  $M$  à l'origine du repère  $O$ .  $F$  ne dépend ni de  $\theta$  ni de  $\varphi$ ,  $F$  est à **symétrie sphérique**. De plus  $\vec{F}$  est uniquement suivant  $\vec{u}_r$ , on dit que le **force est radiale**.

## 1.3 Force centrale conservative

On a déjà vu qu'une force conservative dérive d'une énergie potentielle. Il existe donc une fonction énergie potentielle  $E_p(\vec{r})$  qui dépend de la position du point  $M$ , tel que

$\delta W = \vec{F} \cdot \vec{d}\ell = -dE_p$ .  $\vec{d}\ell$  est le vecteur déplacement élémentaire du point  $M$ ,  $\vec{d}\ell = d\vec{OM} = \vec{OM}' - \vec{OM} = \vec{MM}'$  avec  $M$  et  $M'$  infiniment proches.



A priori  $E_p$  est fonction de  $(r, \theta, \varphi)$ . Explicitons le travail élémentaire  $\delta W$  de  $\vec{F}$  :

$$\begin{aligned} \delta W &= \vec{F} \cdot \vec{d}\ell = \vec{F} \cdot d\vec{OM} = \underbrace{F(r) \vec{u}_r}_{\text{car force centrale}} \cdot d(r \vec{u}_r) \\ &= F(r) \vec{u}_r \cdot (r d\vec{u}_r + dr \vec{u}_r) = F(r) dr. \end{aligned}$$

En effet  $\vec{u}_r \cdot \vec{u}_r = 1$  et  $\vec{u}_r \cdot d\vec{u}_r = 0$  car  $\vec{u}_r \perp d\vec{u}_r$  (cela a été justifié dans le cours sur l'énergie mécanique).

Comme  $F(r) dr = -dE_p$  alors  $E_p$  n'est fonction que de  $r$  et  $F(r) = -\frac{dE_p(r)}{dr}$ . On retiendra alors :

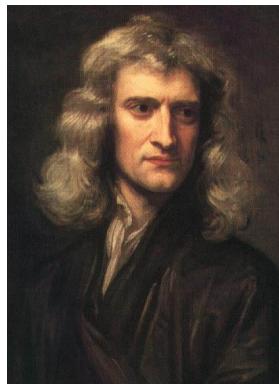
$$\text{Force centrale} \Rightarrow \vec{F} = F(r) \vec{u}_r$$

$$\text{Force centrale conservative} \Rightarrow F(r) = -\frac{dE_p(r)}{dr}$$

- La force centrale conservative est **attractive** si elle est dirigée vers 0 :  $F(r) < 0$  et  $dE_p(r)/dr > 0$ .
- La force centrale conservative est **répulsive** dans le cas contraire :  $F(r) > 0$  et  $dE_p(r)/dr < 0$ .

## 1.4 Exemples fondamentaux

### FORCE DE GRAVITE



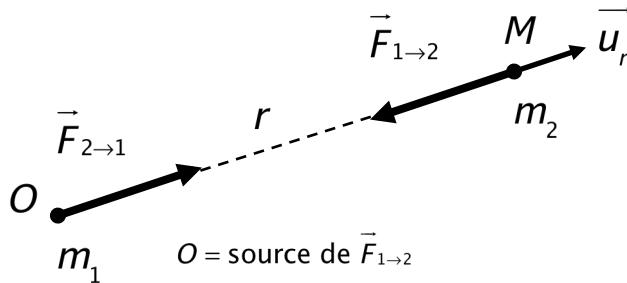
Sir Isaac Newton (1643-1727)

### FORCE ELECTROSTATIQUE

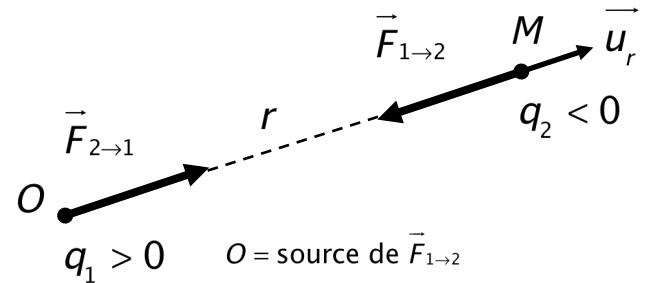


Charles de Coulomb (1736-1806)

$M$  = point d'application de  $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$



$M$  = point d'application de  $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$



$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = -K \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_r$$

$\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$  attractive toujours

$K = G$  = constante de gravitation universelle

$$G = 6,673 \times 10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2}$$

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = K \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_r$$

$\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$  attractive si  $q_1 q_2 < 0$

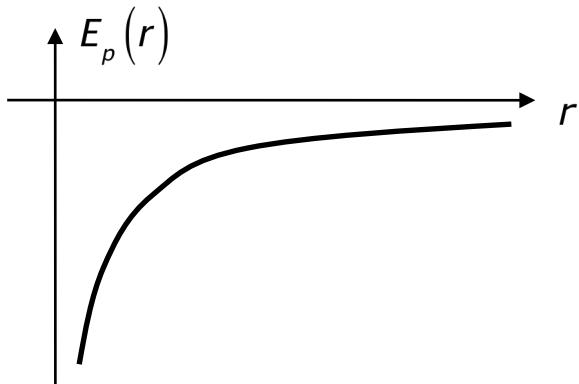
$\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$  répulsive si  $q_1 q_2 > 0$

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

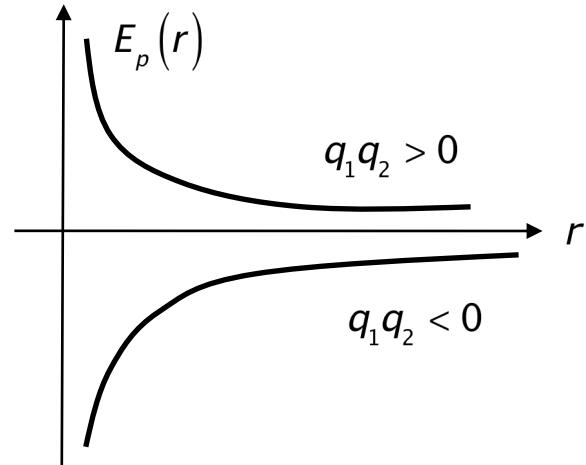
$$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \times 10^9} \text{ C.N}^{-1}.\text{m}^{-2} \text{ (exactement)}$$

= permittivité du vide

$$E_p(r) = -K \frac{m_1 m_2}{r} \quad (\text{si } E_p(r = \infty) = 0)$$



$$E_p(r) = K \frac{q_1 q_2}{r} \quad (\text{si } E_p(r = \infty) = 0)$$



On constate une très forte analogie entre l'expression de la force de gravité et celle de la force électrostatique. La grande différence réside dans le fait que la force électrostatique peut être répulsive ou attractive en fonction des signes des charges mises en jeu. La force de gravitation est toujours attractive car les masses sont toujours des grandeurs positives.

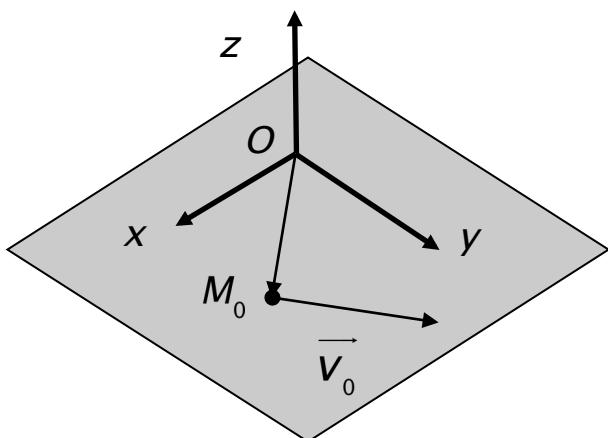
Pour obtenir l'expression de l'énergie potentielle associée à la force centrale conservative, on part du calcul du travail de la force, lorsque  $M$  se déplace d'un point situé en  $r$  jusqu'à l'infini. Nous allons raisonner sur l'exemple de la force de gravité, le calcul est analogue dans le cas de la force électrostatique (nous en reparlerons dans le cours d'électrocinétique).

$$\begin{aligned} -(E_p(\infty) - E_p(r)) &= W_{r \rightarrow \infty} = \int_r^{\infty} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_r^{\infty} -K \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_r \cdot (r d\vec{u}_r + dr \vec{u}_r) = -K m_1 m_2 \int_r^{\infty} \frac{1}{r^2} dr = -K m_1 m_2 \left[ -\frac{1}{r} \right]_r^{\infty} \\ &= 0 - K \frac{m_1 m_2}{r} \text{ donc } E_p(r) = -K \frac{m_1 m_2}{r} \text{ avec } E_p(\infty) = 0. \end{aligned}$$

## II – Lois générales de conservation

### 2.1 Conservation du moment cinétique

#### a) Planéité du mouvement



On suppose qu'à l'instant initial,  $t = 0$ , le point  $M$  se trouve en  $M_0$  avec une vitesse  $\vec{v}_0$ . On suppose que la vitesse est dans le plan  $(O, x, y)$  ce qui n'enlève rien à la généralité du problème.  $M$  est soumis à la force centrale  $\vec{F} = F(r) \vec{u}_r$ . Nous allons appliquer le théorème du moment cinétique au point  $O$ , origine du repère.

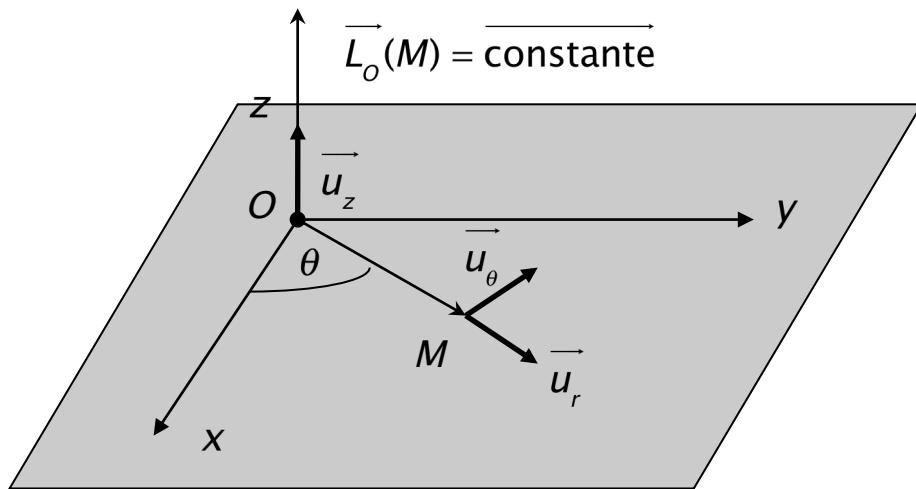
$$\frac{d\vec{L}_o(M)}{dt} = \vec{OM} \wedge \vec{F} = r \vec{u}_r \wedge F(r) \vec{u}_r = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{L}_o(M) = \text{constante}}.$$

Il y a donc **conservation du moment cinétique** au cours de l'évolution du point  $M$  car la force est centrale. A chaque instant, comme  $\vec{L}_o = \vec{OM} \wedge \vec{mv}$ , le moment cinétique est perpendiculaire au plan défini par  $(O, \vec{OM}, \vec{v})$ . En particulier, à l'instant initial,  $\vec{L}_o$  est perpendiculaire au plan  $(O, x, y)$ . Par conservation du moment cinétique, ce résultat est vrai à chaque instant ce qui signifie que la trajectoire reste confinée dans le plan  $(O, x, y)$ . On retiendra le résultat important suivant :

**Un point matériel soumis à une force centrale a un mouvement plan et son moment cinétique est une constante du mouvement.**

Ce résultat important explique le fait que la trajectoire de la terre autour du soleil ou de la lune autour de la terre est plane. Nous allons en reparler. Il faut noter que ce résultat ne dépend que du fait que la force soit centrale, pas du fait qu'elle soit conservative.

### b) Interprétation cinétique : loi des aires en coordonnées cylindriques



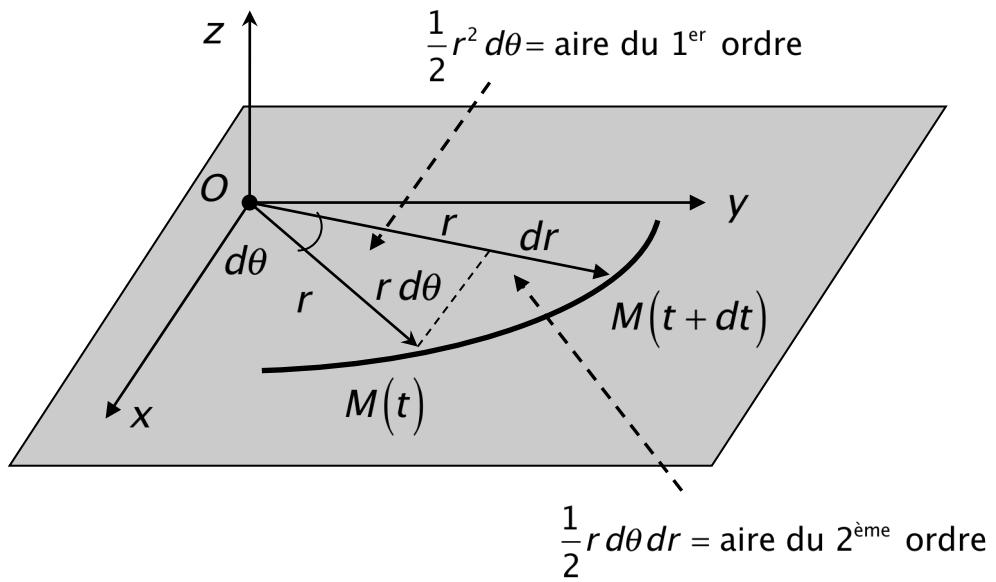
Le mouvement étant plan, nous allons travaillons en coordonnées polaires. Nous sommes libres de choisir le système de coordonnées pour que le plan de la trajectoire soit le plan  $(O, x, y)$ .

L'étude de la cinématique en coordonnées polaires nous indique que  $\vec{OM} = r \vec{u}_r$  (attention il ne s'agit pas du même  $\vec{OM} = r \vec{u}_r$  qu'en coordonnées sphériques) et  $\vec{v} = r \dot{\theta} \vec{u}_\theta + r \vec{u}_r$ . Exprimons alors le moment cinétique :  $\vec{L}_o(M) = \vec{OM} \wedge \vec{mv} = r \vec{u}_r \wedge m \left( r \dot{\theta} \vec{u}_\theta + r \vec{u}_r \right) = mr^2 \dot{\theta} \vec{u}_z$ .

Nous venons de voir que, pour un point matériel soumis à une force centrale, le moment cinétique est une constante du mouvement donc la grandeur  $r^2 \dot{\theta}$ , notée  $C$  par la suite, est **une constante du mouvement** alors que  $r(t)$  et  $\theta(t)$  sont des fonctions du temps évidemment. Cette grandeur joue un rôle important dans la trajectoire des planètes autour du soleil comme nous allons le voir dans la suite de ce chapitre. Nous retiendrons :

Pour un point matériel soumis à une force centrale, la conservation du moment cinétique se traduit par le fait que la grandeur  $C \equiv r^2 \dot{\theta}$  est une constante du mouvement.

La relation  $r^2 \dot{\theta} = \text{constante}$  est nommée **intégrale première du mouvement**. Là encore, ce résultat ne dépend que du fait que la force soit centrale, pas du fait qu'elle soit conservative. La relation précédente trouve une interprétation géométrique remarquable dans la description de la trajectoire du point  $M$ .



Entre deux instants infiniment proches  $t$  et  $t+dt$ , le point  $M$  balaie l'aire élémentaire (voir figure ci-dessus)  $dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta + \frac{1}{2} r d\theta dr \approx \frac{1}{2} r^2 d\theta$ , le deuxième terme étant négligeable devant le

premier car il s'agit d'un terme infiniment petit d'ordre 2. On obtient  $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} C$ . Nous

savons que  $C = r^2 \dot{\theta}$  est une constante donc par intégration, on obtient  $A = \frac{1}{2} C \Delta t$  où  $A$  est l'aire balayée par  $M$  pendant l'intervalle de temps  $\Delta t$ . Cela signifie que, pendant un intervalle de temps donné, l'aire balayée est toujours la même au cours de l'évolution du point  $M$ . Ce résultat justifie la deuxième loi de Kepler obtenue à partir d'observations expérimentales. Nous allons en reparler.

## 2.2 Conservation de l'énergie mécanique

### a) Remarque avant d'aller plus loin

La connaissance complète de la trajectoire du point  $M$  nécessite la connaissance des fonctions  $r(t)$  et  $\theta(t)$ . Grâce à la conservation du moment cinétique, nous savons que la trajectoire est plane ce qui ne nécessite pour la décrire que deux coordonnées d'espace.

Pour déterminer  $r(t)$  et  $\theta(t)$ , il faut résoudre un système d'équations différentielles couplées d'ordre 2 et non-linéaires. En effet l'application du principe fondamental de la dynamique

$m\vec{a} = \vec{F}$  avec  $\vec{a} = \left( \begin{array}{c} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \end{array} \right) \vec{u}_r + \left( \begin{array}{c} 0 \\ 2r\ddot{\theta} + r\dot{\theta}^2 \end{array} \right) \vec{u}_\theta$  en coordonnées polaires et  $\vec{F} = F(r)\vec{u}_r$  donne :

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \frac{F(r)}{m} = -\frac{1}{m} \frac{dE_p(r)}{dr} \Rightarrow \text{équation radiale} \\ \ddot{\theta} = -\frac{2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}}{r} = 0 \Rightarrow \text{équation orthoradiale} \end{cases}$$

Il n'est pas de notre programme de résoudre ces équations différentielles (tâche difficile). Il existe des solutions analytiques dans le cas de la force de gravité et dans celui de la force électrostatique mais de façon générale, on ne peut résoudre ces équations que de façon numérique.

Heureusement, les **lois de conservation** donnent de nombreuses informations sur la trajectoire sans en connaître la nature exacte. La **conservation du moment cinétique** nous a déjà indiqué que la trajectoire était plane, ce qui est une information très importante.

Nous allons à présent considérer la **conservation de l'énergie mécanique** qui va nous fournir de nouvelles informations.

### b) Conservation de l'énergie mécanique

Nous savons que l'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique (fonction de la vitesse) et de l'énergie potentielle (fonction de la position) :  $E_m = E_c + E_p$ . De plus comme la force centrale

est conservative, elle dérive d'une énergie potentielle :  $F(r) = -\frac{dE_p(r)}{dr}$ . On a donc, d'après le

théorème de la puissance mécanique, conservation de l'énergie mécanique du point  $M$  au cours de son évolution. On retiendra que :

**Pour un point matériel soumis à une force conservative, l'énergie mécanique est une constante du mouvement ;  $E_m = \text{constante}$ .**

L'équation  $E_m = \text{constante}$  est aussi appelée **intégrale première du mouvement**.

### c) Expression de l'énergie mécanique en coordonnées polaires

On a  $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + E_p(r) = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + E_p(r)$  en coordonnées polaires. On sait que

$C = r^2\dot{\theta}$  est une constante du mouvement. On peut réécrire  $E_m = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2}\right) + E_p(r)$  ce qui

donne au final :

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} + E_p(r) = \text{constante}$$

L'énergie mécanique qui est une constante est exprimée uniquement en fonction de la variable  $r$ . La variable  $\theta$  a disparu, elle a été absorbée dans  $C$ .

### d) Energie potentielle effective

Le terme  $\frac{1}{2}m\dot{r}^2$  correspond à l'énergie cinétique d'un point matériel dont le mouvement serait purement radial, c'est-à-dire uniquement sur  $r$ . Il est donc commode de faire apparaître une **énergie potentielle effective**  $E_p^{eff}(r) = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} + E_p(r)$ . On peut ainsi réécrire l'énergie mécanique sous une forme qui ressemble à celle d'un mouvement purement radial :

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_p^{eff}(r)$$

$$\text{avec } E_p^{eff}(r) = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} + E_p(r)$$

Il faut cependant faire attention et bien garder à l'esprit que le mouvement du point  $M$  a aussi une composante orthoradiale qui est masquée dans la constante  $C = r^2\dot{\theta}$ . Le fait d'écrire l'énergie mécanique sous la forme précédente est très pratique. Cela permet une discussion qualitative simple sur la nature du mouvement sans résoudre explicitement les équations du mouvement, c'est ce que nous allons faire par la suite.

Il faut aussi noter que la valeur de  $E_p^{eff}(r)$  dépend de la valeur du moment cinétique du point  $M$ ,

$L_o(M) = mr^2\dot{\theta} = \text{constante}$ , à travers  $C = r^2\dot{\theta}$ . La valeur que prend le moment cinétique dépend des conditions initiales de la trajectoire. Par exemple la valeur du moment cinétique de la terre, pour sa trajectoire autour du soleil, a été fixée lors de la formation du système solaire.

### e) Domaines accessibles à la trajectoire

Le domaine des valeurs de  $r$  accessibles à la trajectoire est restreint par le fait que  $\frac{1}{2}mr^2 \geq 0$  ce

qui implique que l'on doit toujours avoir  $E_m \geq E_p^{eff}(r)$ . Lorsque  $E_m = E_p^{eff}(r)$ , on a  $\dot{r} = 0$  ce qui signifie que  $r$  atteint une valeur minimale ou maximale.

On retiendra que :

$$\text{Domaines accessibles à la trajectoire} \Rightarrow E_m \geq E_p^{eff}(r)$$

## III – Discussion du mouvement radial

Nous venons de voir que les lois de conservation permettent de ramener le problème primitif, l'étude de la trajectoire  $\overrightarrow{OM}(r, \theta)$ , à celui, plus simple, de l'étude d'un mouvement purement radial. Cela permet une discussion qualitative simple du mouvement sans résoudre explicitement les équations du mouvement, comme nous l'avons déjà remarqué.

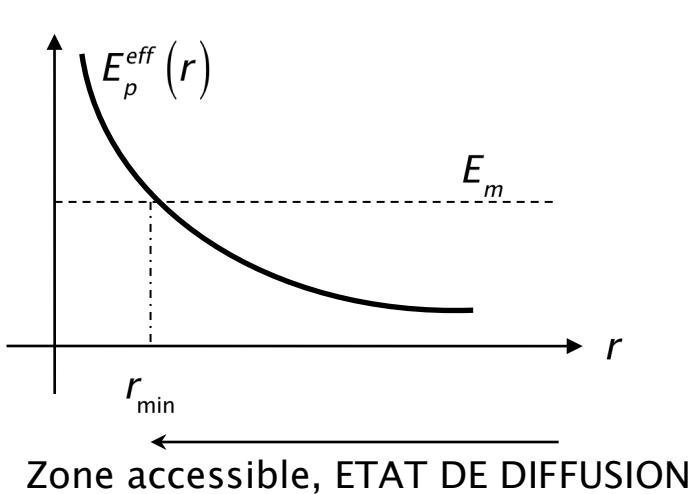
### 3.1 Cas d'une force répulsive, exemple de la force électrostatique

Il s'agit du cas d'une particule soumise à une force électrostatique répulsive  $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = K \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_r$  avec  $q_1 q_2 > 0$ .

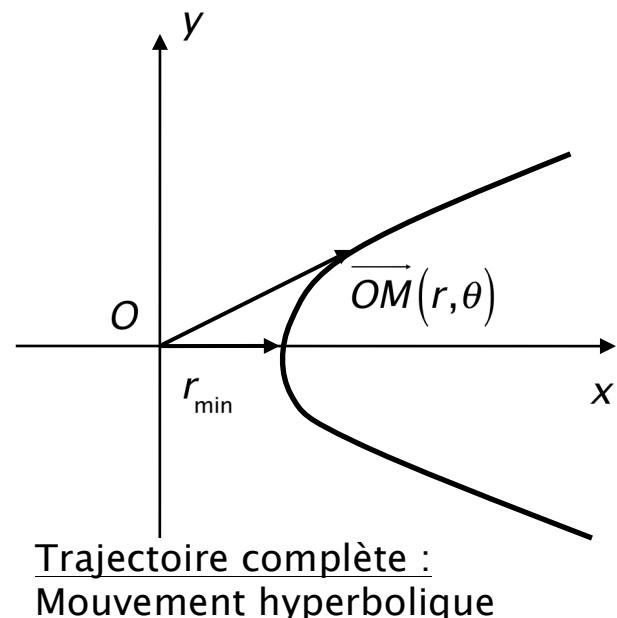
Cette situation correspond à la célèbre expérience de Rutherford dans laquelle une mince feuille d'or est bombardée par des noyaux d'hélium (cf TD d'informatique, méthode d'Euler). Cette expérience a permis de mettre en évidence le noyau des atomes.

On a  $E_p(r) = K \frac{q_1 q_2}{r} > 0$  et  $E_p^{eff}(r) = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} + K \frac{q_1 q_2}{r} > 0$ . Le domaine accessible à la trajectoire est

fourni par la condition  $E_m \geq E_p^{eff}(r)$  comme illustrée sur la figure ci-dessous.



Mouvement radial



Trajectoire complète :  
Mouvement hyperbolique

La trajectoire atteint  $r_{\min}$  quand  $E_p^{\text{eff}}(r) = E_m$ . Par contre, il n'y a pas de limite supérieure à la valeur de  $r$ , on a un état de diffusion. On peut montrer que la trajectoire complète correspond à une hyperbole.

### **3.2 Cas d'une force attractive, exemple de la force de gravitation**

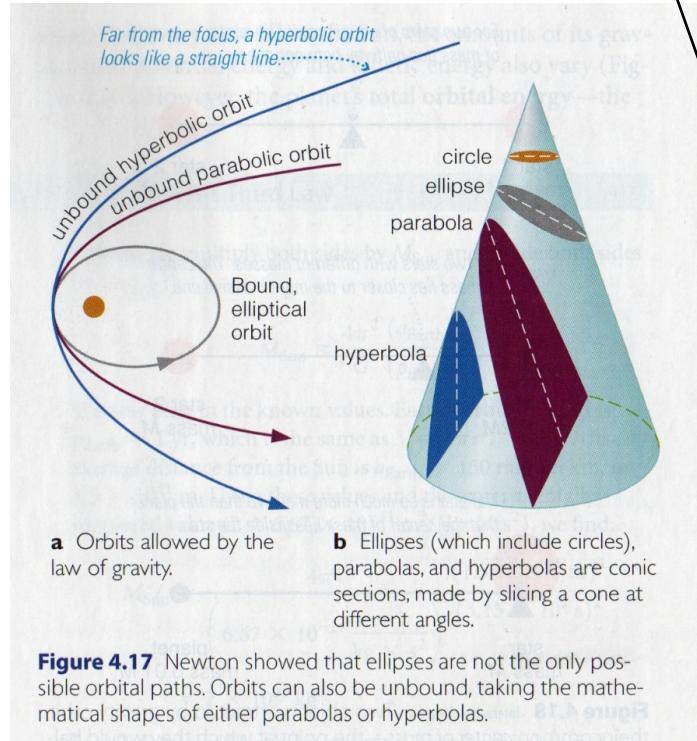
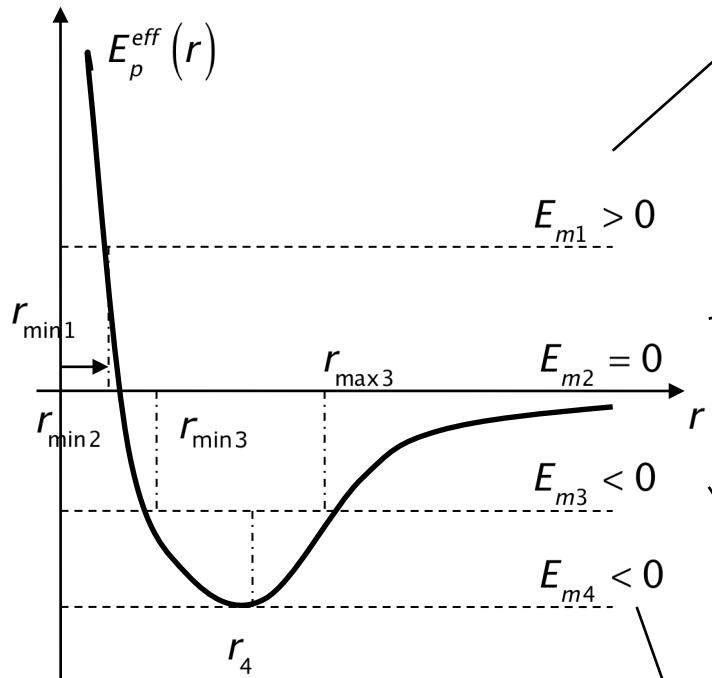
Il s'agit du cas d'une particule soumise à la force de gravitation attractive  $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -K \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_r$ .

Cette situation correspond au cas des planètes du système solaire soumises à l'attraction du soleil, de la lune et des satellites artificiels soumis à l'attraction de la terre, des interactions entre galaxies etc...

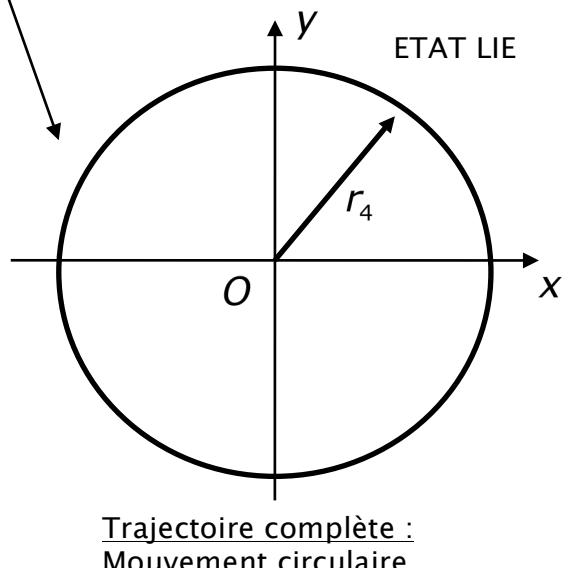
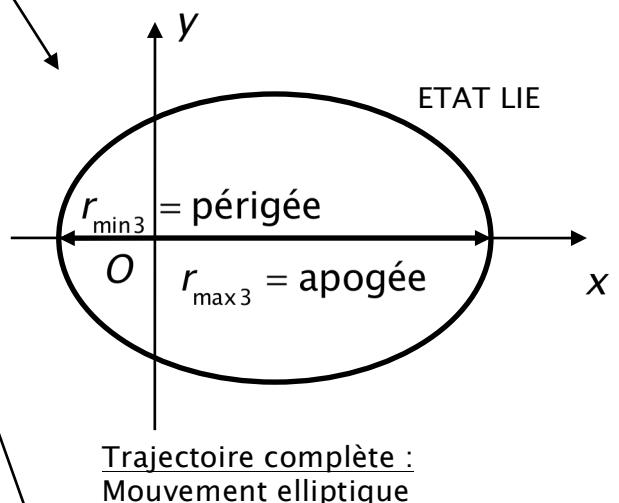
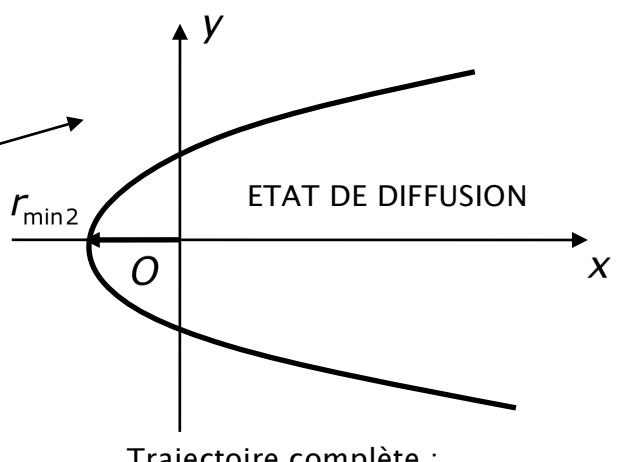
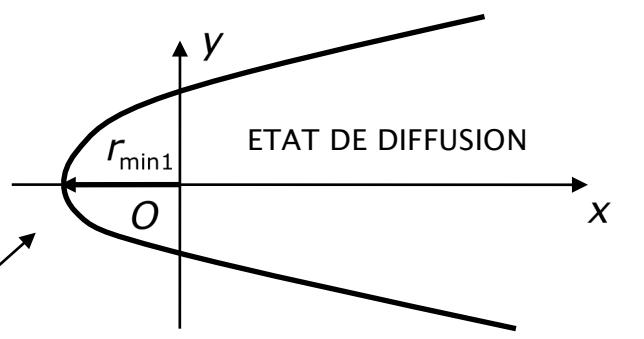
On a  $E_p(r) = -K \frac{m_1 m_2}{r} < 0$  et  $E_p^{\text{eff}}(r) = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} - K \frac{m_1 m_2}{r}$ . La situation est plus complexe mais aussi

plus riche dans ce cas, car, suivant les valeurs de  $r$ , on a  $E_p^{\text{eff}}(r) < 0$  où  $E_p^{\text{eff}}(r) > 0$ .

L'allure de  $E_p^{\text{eff}}(r)$  est représentée ci-dessous ainsi que les divers domaines accessibles suivant la valeur de  $E_m = \text{constante}$ . Le domaine accessible à la trajectoire est toujours donné par la condition  $E_m \geq E_p^{\text{eff}}(r)$ .



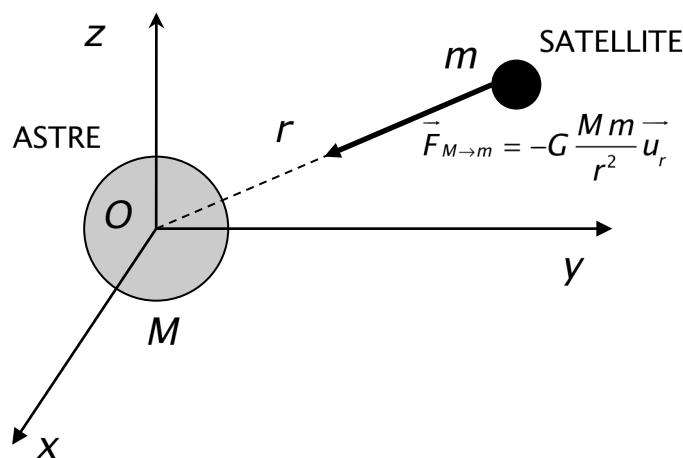
**Figure 4.17** Newton showed that ellipses are not the only possible orbital paths. Orbit can also be unbound, taking the mathematical shapes of either parabolas or hyperbolas.



## IV – Mouvement d'un point matériel soumis à la force de gravité

### 4.1 Hypothèse de l'étude

Nous allons étudier le mouvement d'un point matériel de masse  $m$  (le satellite) soumis à la force de gravité d'un autre objet (l'astre attracteur) de masse  $M$  (à ne pas confondre avec  $M$  le nom du point matériel que l'on emploie habituellement). L'astre sera situé au centre du référentiel galiléen  $O$  et considéré comme immobile car on supposera que  $M \gg m$ . Cette situation est une bonne approximation quand on veut décrire le mouvement des planètes autour du soleil ou de satellites autour de la Terre. En général, les états liés du satellite sont des ellipses mais quand  $M \gg m$ , les ellipses deviennent des cercles. C'est pourquoi nous allons étudier uniquement les trajectoires circulaires. Dans ce cas également, la situation est une bonne approximation pour décrire le mouvement des planètes autour du soleil ou de satellites autour de la Terre.

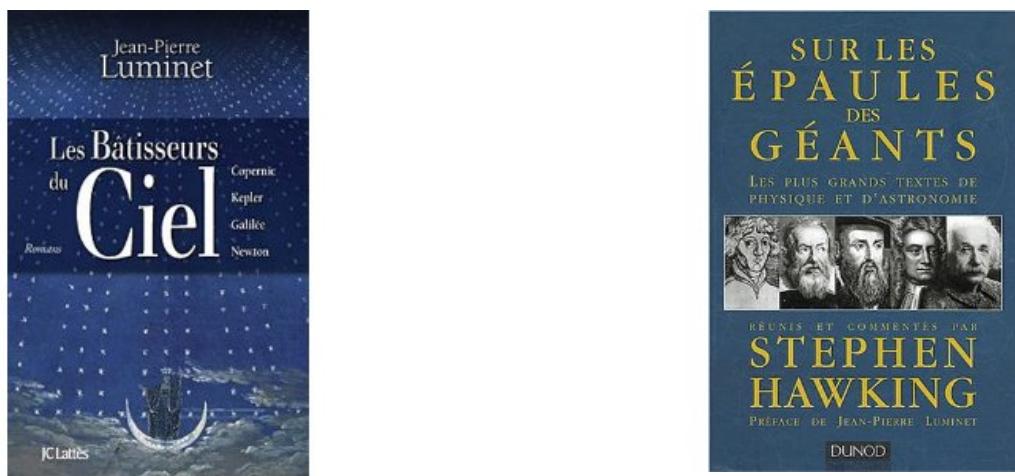


### 4.2 Les trois lois de Képler

Le travail réalisé par Kepler et Tycho est un véritable tour de force. Ils ont observé et noté des centaines et des centaines de positions de planètes et ceci avant que Galilée ne développe sa lunette, avant l'invention du calcul intégral et différentiel de Newton et Leibnitz et bien sûr avant la mise au point des calculatrices et autres ordinateurs. C'est à partir de ces lois expérimentales que Newton a construit les principes de la mécanique et a établi l'expression de la force de gravitation. Le tableau ci-dessous donne une brève biographie de Kepler ainsi qu'un de ses portraits.

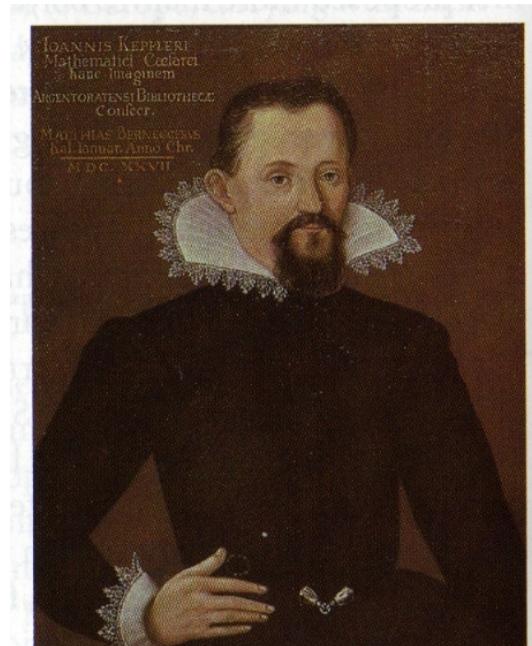
Si vous voulez en savoir plus sur les « bâtisseurs du Ciel » qu'ont été Copernic, Kepler, Galilée, Newton, Einstein ... je vous conseille le passionnant roman biographique de Jean-Pierre Luminet (lui-même physicien et cosmologue de renommé mondiale) : [Les Bâtisseurs du Ciel](#) publié chez J.C Lattès.

Plus technique puisque que regroupant les textes originaux de ces bâtisseurs du ciel, mais historiquement très riche, vous pouvez consulter : Sur les épaules des géants, les plus grands textes de physique et d'astronomie réunis et commentés par Stephen Hawking publié chez Dunod (préface de Jean-Pierre Luminet).



**Kepler** (Johannes), astronome allemand, l'un des créateurs de l'astronomie moderne (près de Weil, Wurtemberg, 1571 - Ratisbonne 1630). D'origine modeste, il poursuivit des études profondes et ardues en dépit d'une vie matérielle constamment difficile et précaire. A la suite de persécutions religieuses, vers 1600, il se réfugia à Prague, où il devint l'assistant de Tycho Brahe, auquel il succéda en 1601 comme astronome de l'empereur Rodolphe II, puis de l'empereur Mathias. Partisan convaincu du système héliocentrique, il entreprit une étude systématique du mouvement de Mars, qui lui permit d'énoncer les lois célèbres régissant le mouvement des planètes et qui ont immortalisé son nom, ouvrant ainsi la voie à Newton pour la découverte de l'attraction universelle.

(extrait de l'encyclopédie Larousse)



Johannes Kepler (1571–1630)

Voici les trois lois énoncées par Kepler :

**1<sup>ère</sup> loi :**

Chaque planète du système solaire décrit une orbite elliptique dont le soleil est l'un des foyers.

**2<sup>ème</sup> loi :**

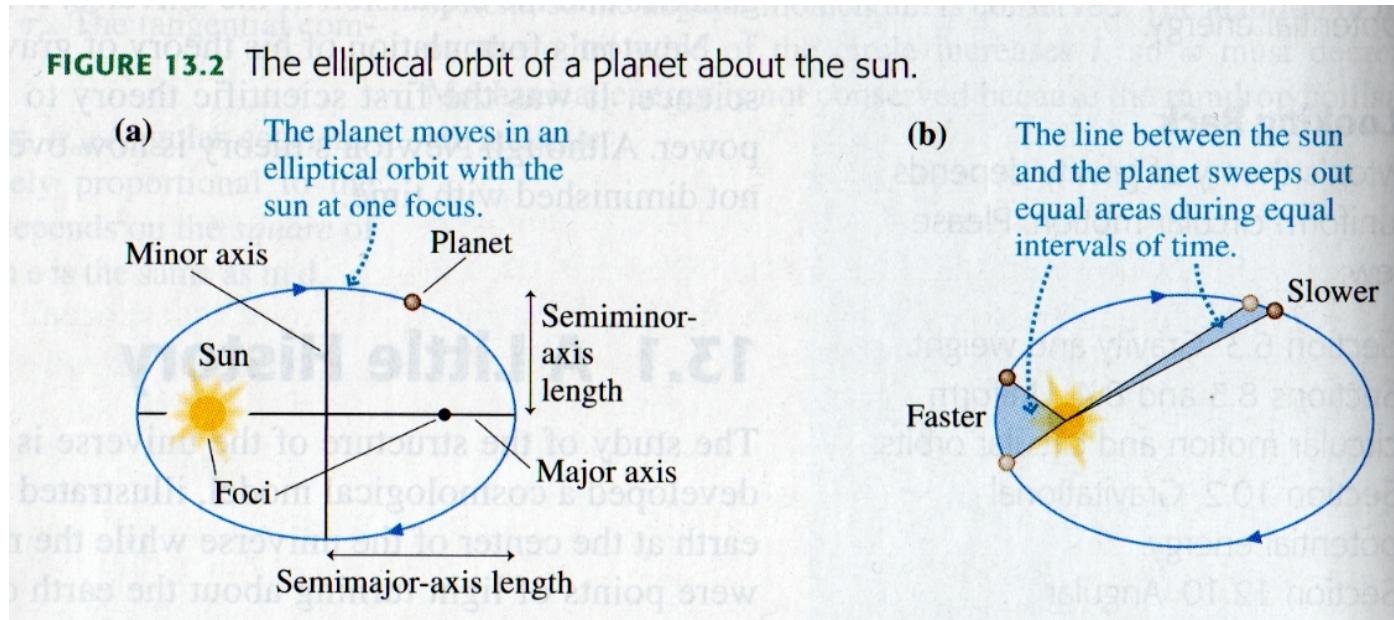
La ligne soleil-planète balaie une aire égale pendant un intervalle de temps identique.

**3<sup>ème</sup> loi :**

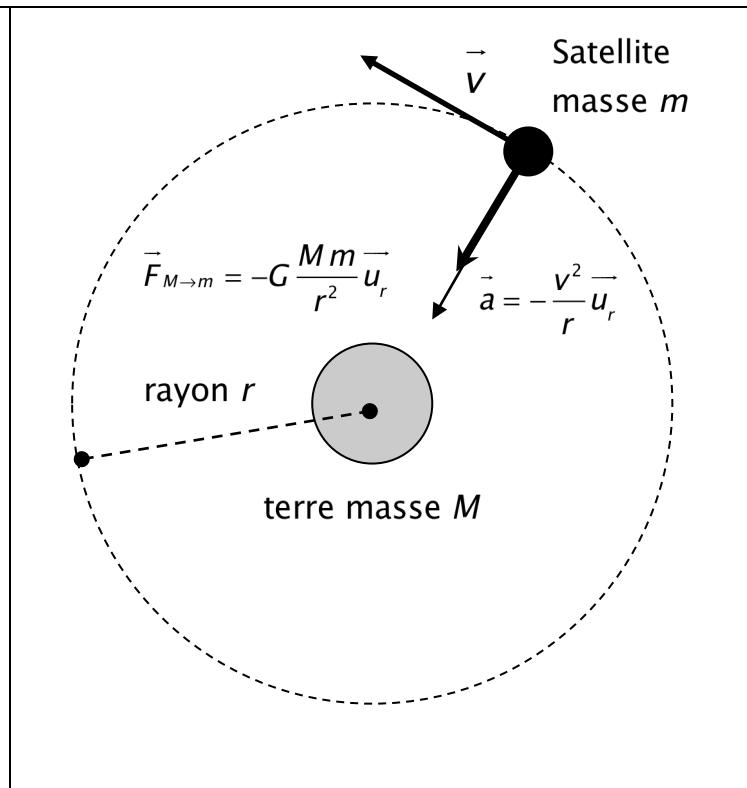
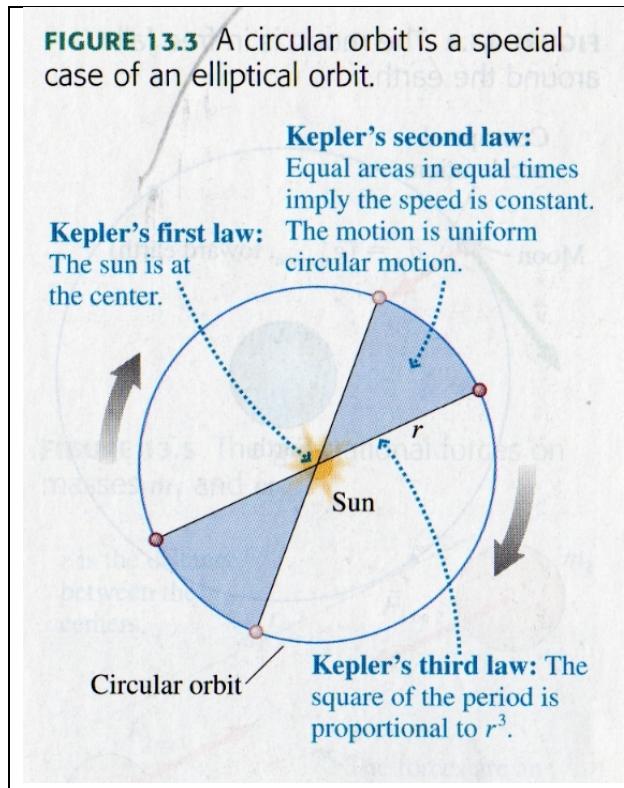
Le carré de la période de révolution d'une planète autour du soleil est proportionnel au cube du grand axe de l'ellipse qu'elle décrit.

## Remarques et commentaires sur les lois de Kepler :

La 1<sup>ère</sup> loi de Kepler trouve sa justification dans l'application du principe fondamental de la dynamique avec l'utilisation de la loi de gravitation de Newton. La 2<sup>ème</sup> loi de Kepler est la conséquence de la conservation du moment cinétique comme nous l'avons vu. Nous allons justifier la 3<sup>ème</sup> loi de Kepler dans le cas des orbites circulaires qui sont un cas particulier des orbites elliptiques (cas  $M \gg m$ ). La figure ci-dessous illustre les lois de Kepler.



## 4.3 Orbite circulaire



On se place toujours dans les hypothèses du paragraphe 4-1). Nous allons étudier le mouvement d'un satellite autour de la Terre (satellite qui peut être la lune). Les résultats obtenus peuvent s'appliquer aussi au mouvement des planètes autour du soleil étant donné que les orbites elliptiques de ces planètes sont presque circulaires. Nous travaillerons en coordonnées polaires.

a) Etat lié

L'énergie mécanique du satellite s'écrit  $E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} - G \frac{Mm}{r}$ . Pour le satellite le rayon  $r$  est fixé. D'après le paragraphe 3-2), le satellite est dans un état lié et  $E_m < 0$ . On retiendra ce résultat :

Orbite circulaire de rayon  $r$ :  $E_m < 0$  ETAT LIE

b) Vitesse sur une orbite circulaire

Nous cherchons à déterminer la vitesse du satellite,  $v$ , pour une orbite circulaire de rayon  $r$ .

Pour cela, il suffit d'appliquer le principe fondamental de la dynamique ;  $m\vec{a} = \sum \vec{F}$ . Ici

$\sum \vec{F} = \vec{F}_{M \rightarrow m} = -G \frac{Mm}{r^2} \vec{u}_r$  et  $\vec{a} = -\frac{v^2}{r} \vec{u}_r$  car on a un mouvement circulaire à vitesse uniforme (cf cours de cinématique). On obtient donc en projetant sur la direction radiale  $-m \frac{v^2}{r} = -G \frac{Mm}{r^2}$  ce qui donne :

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

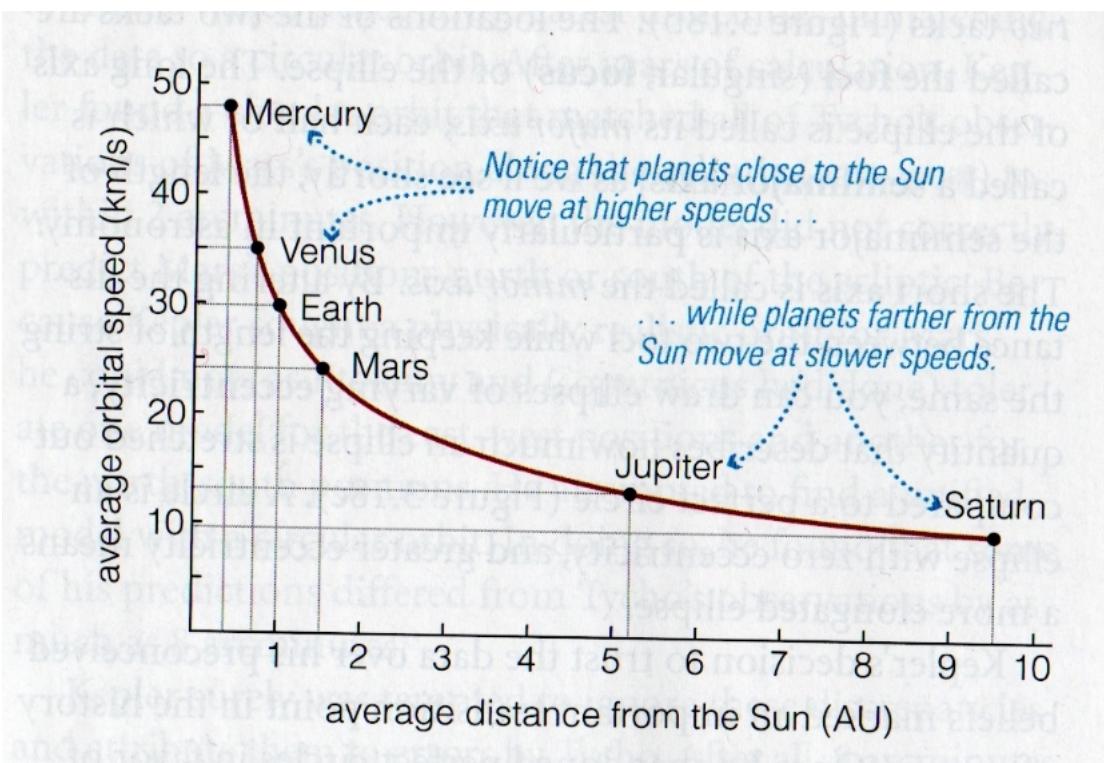
On constate que la vitesse du satellite ne dépend que de la masse de l'astre attracteur et pas de sa propre masse. Cela provient du fait que la masse qui intervient dans le principe fondamental de la dynamique (masse dite inertie) est la même que celle qui intervient dans l'expression de la force de gravité (masse dite grave). Cela a été vérifié de façon très précise expérimentalement et a été érigé en postulat dans la théorie de la relativité générale.

Ainsi, pour une même orbite circulaire de rayon  $r$ , tous les satellites ont la même vitesse. On constate que lorsque  $r$  augmente, la vitesse du satellite diminue.

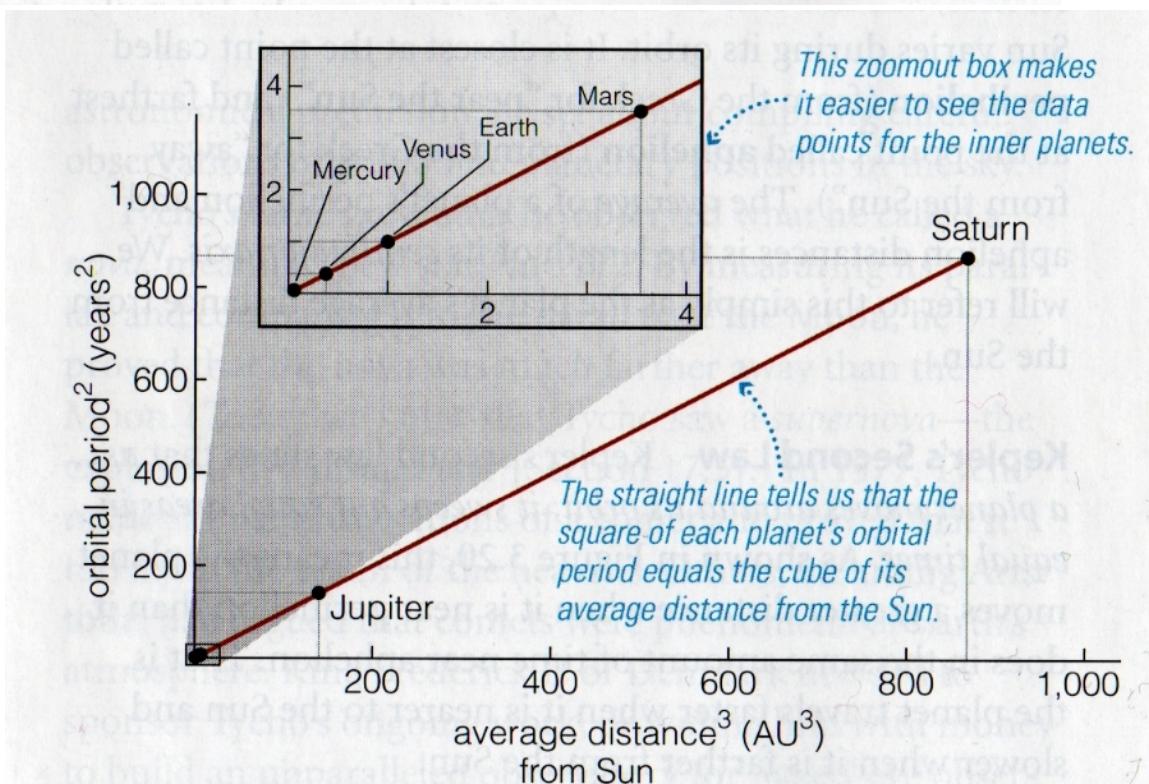
La figure suivante représente la vitesse des planètes du système solaire en fonction de leur distance moyenne par rapport au soleil (les orbites n'étant pas parfaitement circulaires mais elliptiques). On retrouve bien la loi  $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$ . Plus la planète est éloignée du soleil, plus sa vitesse est faible. On peut déterminer complètement l'énergie mécanique du satellite à présent.

En effet  $E_m = \frac{1}{2} mv^2 - G \frac{Mm}{r}$  et en utilisant  $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$ , on obtient :

$$E_m = -\frac{1}{2} \frac{G M m}{r} < 0 \quad (\text{orbite circulaire})$$



**b** This graph shows how orbital speed depends on distance from the Sun. (Kepler knew the form of this relationship but not actual speeds, because the numerical value of the astronomical unit was not yet known.)



**a** This graph shows that Kepler's third law ( $p^2 = a^3$ ) does indeed hold true; for simplicity, the graph shows only the planets known in Kepler's time.

### c) Troisième loi de Kepler

La période de révolution du satellite vaut  $T = \frac{\text{périmètre du cercle}}{\text{vitesse}} = \frac{2\pi r}{v}$ . En utilisant le fait que

$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$  on arrive à :

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

Il s'agit de la troisième loi de Kepler. Ainsi quel que soit le rayon de l'orbite du satellite et quelle que soit sa masse, le rapport  $\frac{T^2}{r^3}$  est une constante qui dépend uniquement de la masse de l'astre attracteur.

Pour les planètes du système solaire, on a  $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_{\odot}}$  où  $M_{\odot}$  est la masse du soleil et  $a$  le demi-

grand axe de l'orbite elliptique. Ainsi pour chaque planète, le rapport  $\frac{T^2}{a^3}$  a la même valeur, bien que  $T$  et  $a$  soient propres à chaque planète.

La figure ci-dessus illustre ce résultat.

### d) 1<sup>ère</sup> vitesse cosmique : vitesse de satellisation

On souhaite mettre sur orbite circulaire un satellite autour de la Terre avec un rayon égal à celui de la Terre  $R_T \approx 6370$  km. Il s'agit bien sûr d'un cas limite d'orbite basse. La station spatiale internationale se trouve à une hauteur de seulement 340 km environ. Le rayon de son orbite est donc proche de la valeur du rayon terrestre.

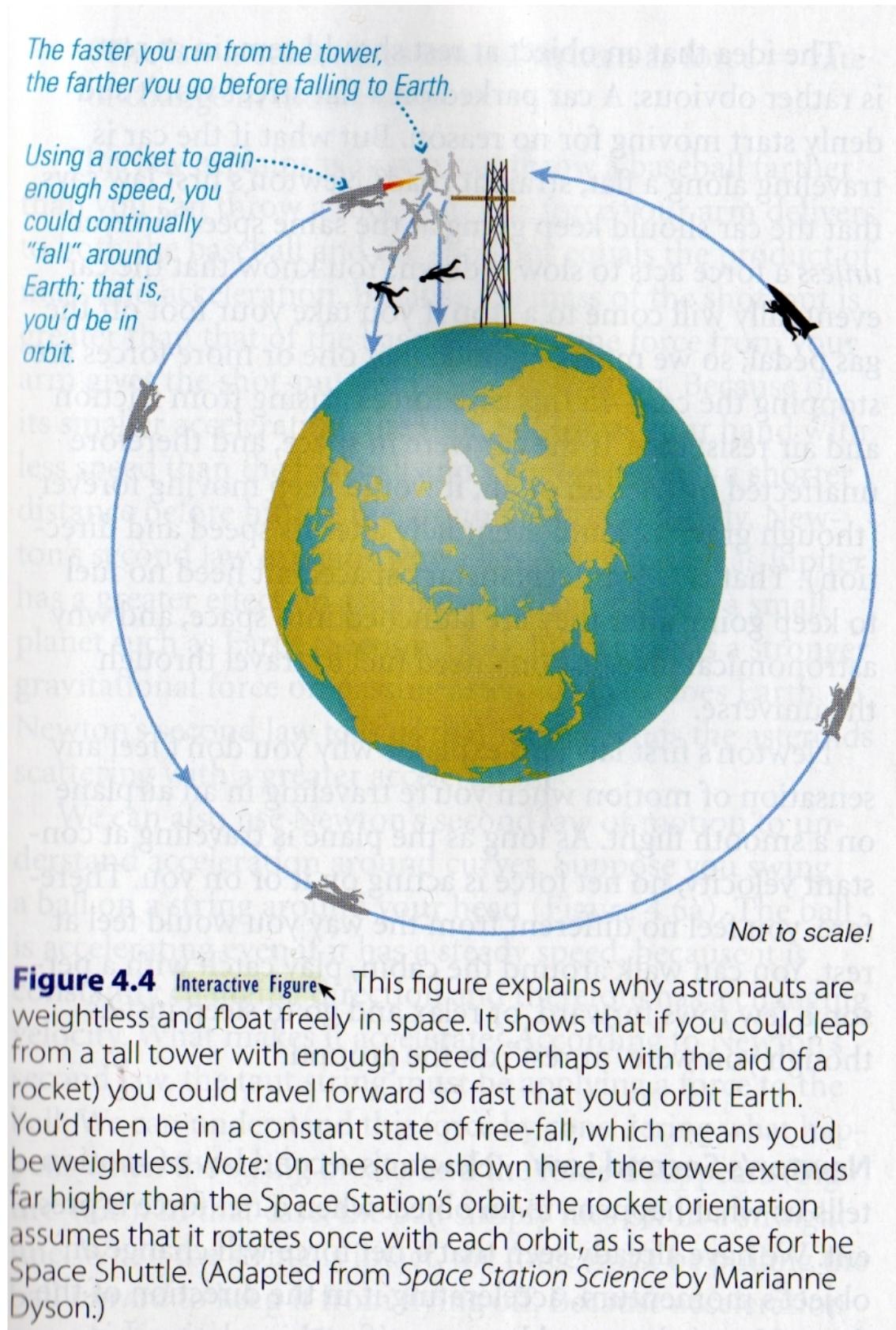
Quelle vitesse minimale doit-on communiquer au satellite pour le mettre en orbite ? Pour répondre à cette question, il suffit d'utiliser la relation  $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$  avec  $r = R_T \approx 6370$  km. On

trouve alors la vitesse de satellisation correspondante notée  $v_s$  :

$$v_s = \sqrt{\frac{GM}{R_T}} \approx 7,92 \text{ km.s}^{-1}$$

Il s'agit bien sûr d'une vitesse énorme qui requiert beaucoup d'énergie. Pour diminuer cette énergie, on se sert de la vitesse de rotation de la Terre sur elle-même qui à l'équateur est maximale et vaut  $\Omega_T = 0,46 \text{ km.s}^{-1}$ . C'est pour cela que les bases de lancement de fusée sont situées le plus près possible de l'équateur (Floride, Guyane, Kazakhstan).

Plus on lance un objet avec une grande vitesse, plus il va retomber loin (cf cours de dynamique), lorsqu'on le lance avec la vitesse  $v_s$ , il va retomber tellement loin qu'il va continuellement tomber à côté de la Terre, il sera donc en orbite. On peut dire que la lune et les satellites artificiels tombent en permanence sur la Terre mais à côté (heureusement surtout pour la lune...). Cette situation est illustrée sur la figure ci-dessous.



### e) 2<sup>ème</sup> vitesse cosmique : vitesse d'échappement

Quelle vitesse minimale faut-il donner à un objet sur Terre pour qu'il puisse s'échapper définitivement de l'attraction gravitationnelle de la Terre ? On notera  $v_e$  cette vitesse.

Avec  $v = v_e$  l'objet pourra atteindre  $r \rightarrow +\infty$  avec une vitesse nulle, l'objet va s'arrêter à l'infini (si  $v > v_e$  sa vitesse finale ne sera pas nulle). Dans l'état final, l'énergie mécanique de l'objet sera alors nulle  $E_{mf} = E_{cf} + E_{pf} = 0$ . Par conservation de l'énergie mécanique, on a  $E_{mf} = E_{mi} = 0$ . Or

l'énergie mécanique initiale s'écrit  $E_{mi} = E_{ci} + E_{pi} = \frac{1}{2}mv_e^2 - G\frac{Mm}{R_T} = 0$  ce qui donne :

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R_T}} = \sqrt{2} v_s \simeq 11,2 \text{ km.s}^{-1}$$

Il s'agit encore une fois d'une vitesse importante. Vous avez de la marge avant d'envoyer dans le cosmos un ballon de rugby.

### ANNEXE 1: petit $g$ et grand $G$

A la surface d'une planète  $X$ , un habitant de masse  $m$  est soumis à la force de gravitation

qui vaut  $F_{M_X \rightarrow m} = G \frac{M_X m}{r_X^2}$  (**perspective universelle**) que l'on peut réécrire

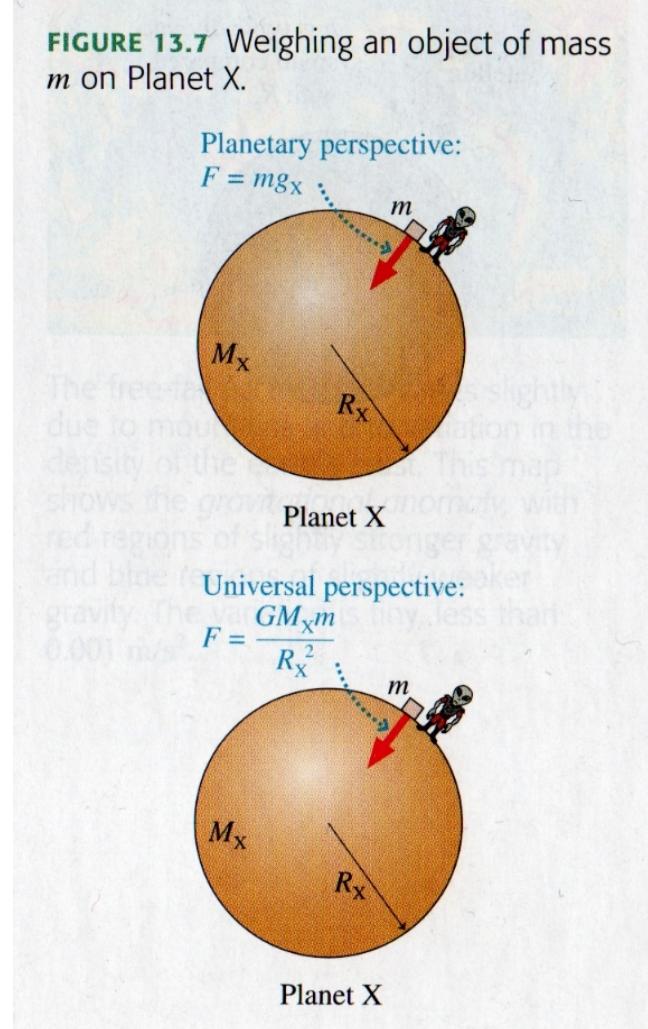
$F_{M_X \rightarrow m} = mg_X$  (**perspective de la planète en question**) avec  $g_X = G \frac{M_X}{r_X^2}$ .  $mg_X$  est le poids

de l'habitant sur la planète  $X$  et  $g_X$  l'accélération (ou champ) de pesanteur de la planète  $X$ .

Sur Terre  $g_{\text{Terre}} \approx 9,8 \text{ m.s}^{-2}$ , sur Mars

$g_{\text{Mars}} \approx 3,8 \text{ m.s}^{-2}$ . La figure ci-contre illustre la différence entre ces deux perspectives.

**FIGURE 13.7** Weighing an object of mass  $m$  on Planet X.



# ANNEXE 1: Caractéristiques des planètes du système solaire

Photo	Planet	Relative Size	Average Distance from Sun (AU)	Average Equatorial Radius (km)	Average Mass (Earth = 1)	Average Density (g/cm <sup>3</sup> )	Orbital Period	Rotation Period	Ax/S Tilt	Surface for Cloud-Top <sup>a</sup>	Composition	Known Moons (2007)	Rings?
			Average Distance from Sun (AU)	Average Equatorial Radius (km)	Average Mass (Earth = 1)	Average Density (g/cm <sup>3</sup> )	Orbital Period	Rotation Period	Ax/S Tilt	Surface for Cloud-Top <sup>a</sup>	Composition	Known Moons (2007)	Rings?
	Mercury	0.387	2,440	0.055	5.43	87.9 days	58.6 days	0.0°	700 K (day) 100 K (night)	Rocks, metals	0	No	
	Venus	0.723	6,051	0.82	5.24	225 days	243 days	177.3°	740 K	Rocks, metals	0	No	
	Earth	1.00	6,378	1.00	5.52	1.00 year	23.93 hours	23.5°	290 K	Rocks, metals	1	No	
	Mars	1.52	3,397	0.11	3.93	1.88 years	24.6 hours	25.2°	220 K	Rocks, metals	2	No	
	Jupiter	5.20	71,492	318	1.33	11.9 years	9.93 hours	3.1°	125 K	H, He, hydrogen compounds <sup>b</sup>	63	Yes	
	Saturn	9.54	60,268	95.2	0.70	29.4 years	10.6 hours	26.7°	95 K	H, He, hydrogen compounds <sup>b</sup>	60	Yes	
	Uranus	19.2	25,559	14.5	1.32	83.8 years	17.2 hours	97.9°	60 K	H, He, hydrogen compounds <sup>b</sup>	27	Yes	
	Neptune	30.1	24,764	17.1	1.64	165 years	16.1 hours	29.6°	60 K	H, He, hydrogen compounds <sup>b</sup>	13	Yes	
	Pluto	39.5	1,160	0.0022	2.0	248 years	6.39 days	112.5°	40 K	Ices, rock	3	No	
	Eris	67.7	1,200	0.0028	2.3	557 years	? ?	? ?	? ?	Ices, rock	1	?	

<sup>a</sup>Including the dwarf planets Pluto and Eris; Appendix E gives a more complete list of planetary properties. <sup>b</sup>Surface temperatures for all objects except Jupiter, Saturn, Uranus, and Neptune, for which cloud-top temperatures are listed. Includes water (H<sub>2</sub>O), methane (CH<sub>4</sub>), and ammonia (NH<sub>3</sub>).